



Consignes générales :

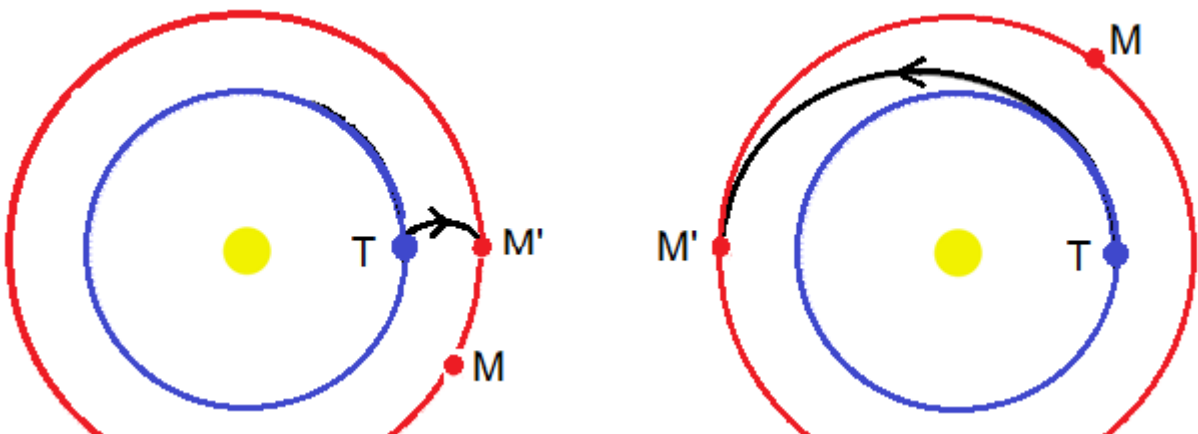
- L'ordre est indifférent, mais on séparera clairement les exercices ;
- il est conseillé de tous les aborder (difficulté progressive dans un exercice).
- Toute question, même qualitative, appelle une réponse argumentée.
- La qualité de la rédaction (*français et écriture mathématique*) sera notée.
- La qualité de la présentation également : soin, aération, **résultats encadrés**.
- Une application numérique sans unité explicite et appropriée ne sera pas prise en compte.
- Pour le nombre de chiffres significatifs à conserver pour le résultat final, on s'aligne sur la donnée la moins précise, avec au moins 2 chiffres significatifs (sauf indication contraire).

1 Mouvements newtoniens

De la Terre à Mars

NB : Les données numériques nécessaires sont présentes, il n'y a pas lieu d'en utiliser d'autres, à part la durée de l'année terrestre, supposée connue de tous !

1. Les orbites héliocentriques de la Terre et de Mars sont assimilées à des cercles, parcourus dans le même sens (antihoraire sur les figures suivantes). Le rapport des rayons orbitaux est $a_M/a_T \approx 1,52$, et la vitesse héliocentrique de la Terre est très proche de 30 km/s. En déduire les valeurs des deux rayons, la vitesse orbitale de Mars et la durée, en mois terrestres, de l'année martienne.
2. Un vaisseau spatial est envoyé de la Terre (départ en T, Mars étant en M) vers Mars (arrivée en M', la Terre étant alors en T'), en suivant une orbite de transfert dont on peut lire qu'elle est "semi-elliptique, tangente aux orbites de la Terre et de Mars aux extrémités de son grand axe." Les deux trajectoires ci-dessous vérifient cela ; laquelle faut-il choisir, et pourquoi ?
3. Le robot Perseverance a été lancé sur une telle trajectoire, le 30 juillet 2020 ; à quelle date est-il arrivé ? Quelle était la distance T'-M' à cette date ? En quoi est-ce important ?



La comète interstellaire 1I/Oumuamua

Données : $M_{\text{Soleil}} \approx 2,0 \times 10^{30}$ kg; $G \approx 6,7 \times 10^{-11}$ SI; distance Terre-Lune : 384×10^3 km.

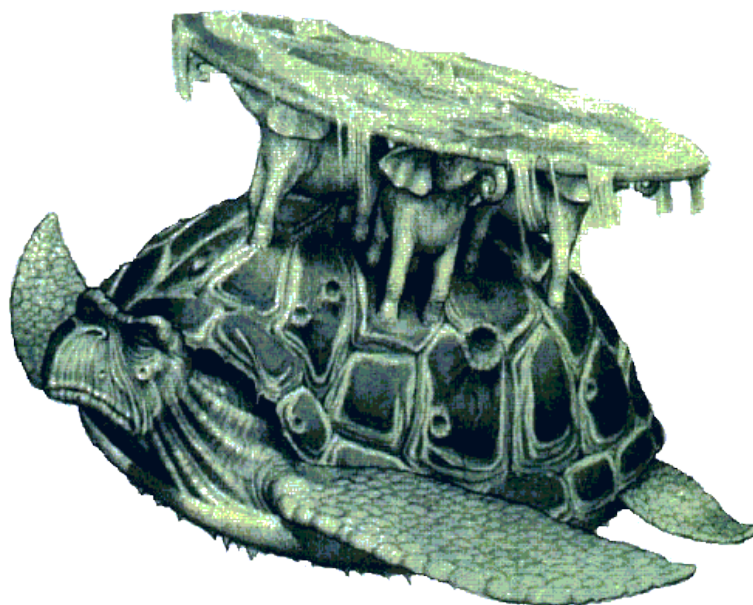
Le rayon de l'orbite terrestre définit l'unité astronomique : $1 \text{ UA} \approx 150$ millions de kilomètres.

En octobre 2017, des astronomes découvraient depuis Hawaï un étrange objet semblant venir d'un autre système stellaire; cela a été confirmé et lui vaut sa dénomination officielle : '1I' pour *premier* objet d'origine *interstellaire* identifié comme tel dans le système solaire.

selon le site Futura Sciences : En plus de son apparence étrange, 'Oumuamua se déplace sur une trajectoire très elliptique. Trop elliptique pour que son accélération soit seulement d'origine gravitationnelle.

selon Wikipédia : L'objet est découvert le 19 octobre et a une vitesse de près de 50 km/s à ce moment. Sa vitesse à l'infini est de 26,4 km/s, et à mesure qu'il s'est rapproché du Soleil, il a progressivement accéléré pour atteindre 87,3 km/s au plus près du Soleil, à soixante fois la distance Terre-Lune.

1. Quelle erreur grossière contient l'article de Futura Sciences (un site pourtant plutôt fiable)?
2. Montrer que de son côté, l'extrait de Wikipédia pose problème pour ce qui est de l'énergie.
3. On trouve par ailleurs, dans une autre rubrique de la page Wikipédia : 'périhélie à 0,254 UA'; cette information est-elle compatible avec les vitesses indiquées?



"Dans un ensemble lointain de dimensions récupérées à la casse, dans un plan astral nullement conçu pour planer, les tourbillons de brumes stellaires frémissent et s'écartent... Voyez, la grande tortue A'Tuin apparaît, elle fend d'une brasse paresseuse l'abîme interstellaire, ses membres pesants recouverts d'un givre d'hydrogène, son antique et immense carapace criblée de cratères météoritiques.

De ses yeux vastes comme des océans, encroûtés de poussière d'astéroïdes, elle fixe le But Ultime. Dans son cerveau plus grand qu'une ville, avec une lenteur géologique, elle ne songe qu'au Fardeau. Une bonne partie du fardeau est évidemment due à Bérilia, Tubul, Ti-Phon l'Immense et Jérakine, les quatre éléphants géants dont les larges épaules bronzées par les étoiles soutiennent le disque du Monde que la longue cataracte enguirlande sur son vaste pourtour et que surplombe le dôme bleu layette des Cieux."

Terry Pratchett, *La huitième couleur (The Colour of Magic)*, 1983.

2 Mouvement unidimensionnel

Un point matériel de masse m se meut sur un axe Ox (axe fixe en référentiel galiléen), soumis à la seule force :

$$\vec{F} = -\text{sgn}(x) F_0 \vec{u}_x \quad (F_0 > 0)$$

1. Déterminer et représenter l'énergie potentielle associée à cette force, avec $E_p(0) = 0$.
Discuter la possibilité d'équilibre, d'états liés, d'états de diffusion.
2. Les conditions initiales sont $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = v_0 > 0$.
Expliquer pourquoi le mouvement est périodique, et déterminer son amplitude a .
Si la vitesse initiale est faible, les oscillations sont-elles harmoniques ou non ? Justifier.
3. Le mobile étant en mouvement dans le sens des x croissants (avec les conditions initiales précédentes), exprimer sa vitesse en fonction de sa position x .
4. En déduire la relation suivante :

$$dt = \frac{dx}{v_0 \sqrt{1 - x/a}}$$

5. Intégrer cette égalité pour obtenir la période T des oscillations. Discuter l'influence de v_0 .

3 Oxydoréduction - Précipitation

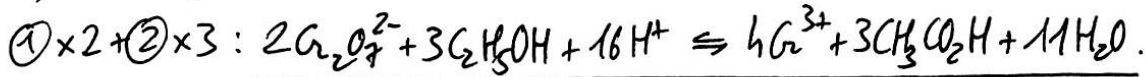
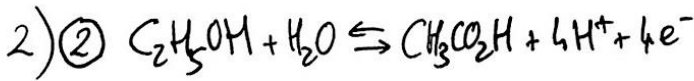
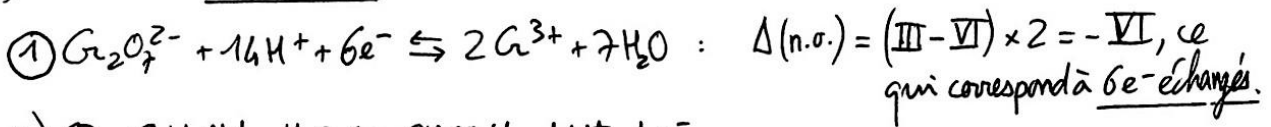
selon Wikipédia : L'ion dichromate $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}$ est un puissant agent oxydant. Il est toxique par simple contact ou inhalation. Son utilisation est interdite dans les établissements scolaires de premier et second degré en France. Il sert entre autres à déceler la présence d'alcool (éthanol), dans certains éthylo-tests, car de couleur jaune il passe au vert caractéristique des ions chrome Cr^{3+} .

1. Quels sont les nombres d'oxydation respectifs du chrome dans les deux espèces citées ?
Vérifier avec la $\frac{1}{2}$ équation d'échange électronique.
2. Équilibrer la réaction d'oxydation de l'éthanol ($\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$) en acide éthanóique (CH_3COOH), utilisée dans les alcootests.
3. Quel est la formule de l'ion monoatomique de l'iode (ion iodure) ? Justifier la réponse.
Comparer l'état d'oxydation du cuivre dans l'iodure cuivré $\text{CuI}_{(s)}$, l'oxyde cuivré $\text{Cu}_2\text{O}_{(s)}$, et l'oxyde de cuivre $\text{CuO}_{(s)}$.
4. Comparer les solubilités molaires dans l'eau de CuI et CuO , sachant que :
 $M_{\text{Cu}} \approx 64,3 \text{ g/mol}$; $s(\text{CuO}) \approx 4 \times 10^{-4} \text{ g/L}$; $\text{p}K_S(\text{CuI}) \approx 11$.
5. Le cuivre (I) vérifie : $E^0(\text{Cu}^+/\text{Cu}_{(s)}) = E_1^0 = 0,52 \text{ V}$ et $E^0(\text{Cu}^{2+}/\text{Cu}^+) = E_2^0 = 0,16 \text{ V}$.
Calculer la constante de sa réaction de dismutation.
6. Soit E_3^0 le potentiel standard du couple $\text{CuI}_{(s)}/\text{Cu}_{(s)}$, et E_4^0 celui du couple $\text{Cu}^{2+}/\text{CuI}_{(s)}$.
Écrire pour chaque couple la demi-équation redox et le potentiel de Nernst associé.
7. Dans une solution où les ions et les solides sont présents, exprimer d'une part E_3^0 en fonction de E_1^0 et $\text{p}K_S$, et d'autre part E_4^0 en fonction de E_2^0 et $\text{p}K_S$.
Calculer E_3^0 et E_4^0 , et conclure quant à la stabilisation du cuivre (I) par précipitation.

— = FIN = —

OXYDORÉDUCTION – PRECIPITATION - corrigé

1) $\text{Cr}^{3+} \Rightarrow \text{n.o.} = +\text{III}$; $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-} : \text{n.o.}(\text{Cr}) \times 2 + (-\text{II}) \times 7 = -\text{II} \Rightarrow \text{n.o.}(\text{Cr}) = +\text{VI}$



3) I est un halogène ⇒ gagne un e⁻ pour saturer sa dernière couche électronique : I⁻.

Cu I neutre donc Cu⁺ : n.o. = +I ; de m dans Cu₂O avec n.o.(O) = -II.

Ainsi dans CuO : n.o.(Cu) = +II.

4) $s(\text{CuO}) = 4 \cdot 10^{-4} \text{ g/L} = \frac{4 \cdot 10^{-4}}{64,3 + 16} \text{ mol/L} \approx 5 \cdot 10^{-6} \text{ mol/L}$.

é.i. excès 0 0) ⇒ à l'éq. $K_s = Q_r = s^2$ donc $s = 10^{-5,5} \text{ mol/L} \approx 3,2 \cdot 10^{-6} \text{ mol/L}$.
 éq. excès s s

5) $\text{Cu}^+ + \text{e}^- \rightleftharpoons \text{Cu(s)} \quad E_1 = E_1^0 + \frac{0,06}{1} \log[\text{Cu}^+]$
 $\text{Cu}^{2+} + \text{e}^- \rightleftharpoons \text{Cu}^+ \quad E_2 = E_2^0 + \frac{0,06}{1} \log \frac{[\text{Cu}^{2+}]}{[\text{Cu}^+]}$
 On utilise l'unicité du potentiel à l'équilibre. | $2\text{Cu}^+ \rightleftharpoons \text{Cu(s)} + \text{Cu}^{2+}$
 $K = \frac{[\text{Cu}^{2+}]}{[\text{Cu}^+]^2} = 10^{\frac{E_1^0 - E_2^0}{0,06}} = 10^6$.
 Valeur assez élevée.

6) $\text{CuI(s)} + \text{e}^- \rightleftharpoons \text{Cu(s)} + \text{I}^- : E_3 = E_3^0 + \frac{0,06}{1} \log \left(\frac{1}{[\text{I}^-]} \right)$
 $\text{Cu}^{2+} + \text{I}^- + \text{e}^- \rightleftharpoons \text{CuI(s)} : E_4 = E_4^0 + \frac{0,06}{1} \log([\text{Cu}^{2+}][\text{I}^-])$

7) Eq. entre toutes les espèces ⇒ $E = E_1 = E_2 = E_3 = E_4$ et $K_s = [\text{Cu}^+][\text{I}^-]$.

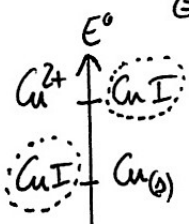
• $E_1 = E_3 \Leftrightarrow E_1^0 + 0,06 \log[\text{Cu}^+] = E_3^0 + 0,06 \log \frac{1}{[\text{I}^-]}$

⇒ $(E_1^0 - E_3^0) / 0,06 = -\log K_s = \text{p}K_s$

⇒ $E_3^0 = E_1^0 - 0,06 \text{p}K_s \approx -0,14 \text{ V}$.

• $E_2 = E_4 \Leftrightarrow E_2^0 + 0,06 \log \frac{[\text{Cu}^{2+}]}{[\text{Cu}^+]} = E_4^0 + 0,06 \log([\text{Cu}^{2+}][\text{I}^-])$

⇒ $E_2^0 + 0,06 \text{p}K_s = E_4^0$ soit $E_4^0 = 0,82 \text{ V}$.



Cu (II) n'est plus sujet à dismutation car il n'est plus (le meilleur réducteur et le meilleur oxydant)

La cte de la réaction de dismutation vaut $10^{\frac{E_3^0 - E_4^0}{0,06}} = 10^{-16}$.

1) autour du Soleil, en orbite circulaire: $v(r) = \sqrt{\frac{GM_S}{r}}$
 d'où $\frac{v_T^2}{v_M^2} = \frac{r_M}{r_T} = \frac{a_M}{a_T} \Leftrightarrow v_M = \sqrt{\frac{r_T}{r_M}} v_T \approx 0,81 v_T$
 $\approx 24,3 \text{ km/s}$

• 3^e loi de Kepler $\Rightarrow \frac{a_T^3}{T_T^2} = \frac{a_M^3}{T_M^2}$
 $\Rightarrow T_M = T_T \left(\frac{a_M}{a_T}\right)^{3/2} \approx 1,87 T_T \approx 685 \text{ j}$
 $\approx 23 \text{ mois}$

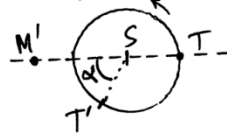
• orbite de la Terre: $v = \frac{2\pi a_T}{T_T}$
 $T_T \approx 365,25 \text{ j} \Rightarrow a_T \approx 150 \cdot 10^6 \text{ km}$
 $a_M \approx 229 \cdot 10^6 \text{ km}$

2) Coût minimal = orbite de Hohmann: 2 DV et voyage sans l'effet de F_{sol}
 L'autre orbite nécessiterait une propulsion incessante, avec accélération puis freinage...

$$a_H = \frac{a_T + a_M}{2} \Rightarrow \frac{T_H}{2} = \frac{T_T}{2} \left(\frac{a_T + a_M}{2a_T}\right)^{3/2}$$

$$= 0,71 T_T \approx 259 \text{ j} \approx 8 \text{ mois et } 19 \text{ j.} \quad \text{arrivée} \approx \underline{\underline{19 \text{ avril } 2021.}}$$

3) T a fait 0,71 tour: $\alpha = 0,21 \times 2\pi \text{ rad.}$



$$T'M'^2 = (T'S + SM')^2 = a_T^2 + a_M^2 - 2ST \cdot SM'$$

$$= a_T^2 + a_M^2 - 2a_T \cdot a_M \cdot \cos \alpha$$

d'où $T'M' \approx 241 \cdot 10^6 \text{ km}$

La comète interstellaire 1I/Oumuamua - Correction

1. L'objet venant de l'infini (tout au moins de l'extérieur du système solaire), son orbite n'est pas elliptique mais hyperbolique.

2. Comme la masse de 'Oumuamua n'est pas connue, raisonnons en énergie massique :

— à l'infini : $\frac{E_\infty}{m} = \frac{v_\infty^2}{2} \approx 0,35 \text{ GJ/kg}$

— au périhélie : $\frac{E(P)}{m} = \frac{v_P^2}{2} - \frac{GM_S}{r_P} \approx -2,0 \text{ GJ/kg}$

D'après ces valeurs non seulement l'énergie mécanique n'est pas du tout conservée, mais de plus la valeur calculée au périhélie serait négative, ce qui correspond à un état lié!

L'orbite serait alors elliptique, de demi grand axe $a = -\frac{GM_S m}{2E(P)} \approx 33 \times 10^6 \text{ km}$ inférieure au rayon de l'orbite terrestre, ce qui est absurde.

Il y a donc un problème certain au niveau des données relatives au périhélie.

3. La valeur 0,254 UA correspond à $38,1 \times 10^6 \text{ km}$, soit à 99 fois la distance Terre-Lune.

La conservation de l'énergie permet alors de relier les trois valeurs v_∞, r_P, v_P ; il faut vérifier :

$$\frac{v_\infty^2}{2} = \frac{v_P^2}{2} - \frac{GM_S}{r_P}$$

Par exemple, à partir de r_P et v_∞ , on calcule $v_P \approx 87,7 \text{ km/s}$.

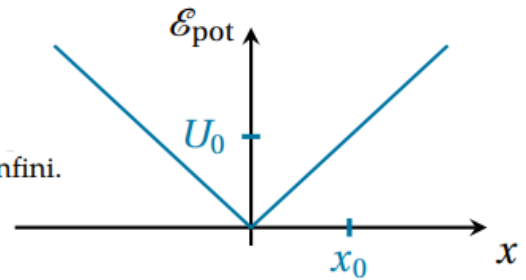
C'est satisfaisant par rapport à la valeur donnée (0,5% d'écart), sachant de plus que les comètes sont caractérisées par des accélérations non gravitationnelles liées au dégazage provoqué par leur réchauffement de surface lorsqu'elles s'approchent du Soleil.

MOUVEMENT UNIDIMENSIONNEL - corrigé

1. On a $F_x = -\frac{d\mathcal{E}_{\text{pot}}}{dx}$. Pour $x > 0$, on peut donc choisir $\mathcal{E}_{\text{pot}} = F_0x$. Pour $x < 0$, on aura $\mathcal{E}_{\text{pot}} = -F_0x$:

L'énergie potentielle tend vers l'infini quand x s'éloigne à l'infini.

Un point matériel sera donc toujours dans un état lié.



2. On écrit la conservation de l'énergie mécanique entre l'état initial ($x = 0, \dot{x} = v_0$) et la position extrême ($x = x_{\text{max}}, \dot{x} = 0$). On a :

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = F_0x_{\text{max}} \quad \text{soit: } x_{\text{max}} = \frac{mv_0^2}{2F_0}.$$

3. (a) On écrit la même relation avec pour état final ($x \leq x_{\text{max}}, \dot{x} \geq 0$). On obtient :

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + F_0x \quad \text{soit: } \dot{x}^2 = v_0^2 - \frac{2F_0x}{m}.$$

- (b) Tant que $\dot{x} \geq 0$, on a $\dot{x} = \sqrt{\dot{x}^2}$, on peut donc écrire :

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} \quad \text{soit: } dt = \frac{dx}{\dot{x}} = \frac{dx}{v_0\sqrt{1 - \frac{2F_0x}{mv_0^2}}} = \frac{dx}{v_0\sqrt{1 - \frac{x}{x_{\text{max}}}}}.$$

- (c) En posant $y = x/x_{\text{max}}$, on a $dx = x_{\text{max}} dy$. De plus le mouvement du point matériel de $x = 0$ à x_{max} correspond à un quart de période, on a donc : $\frac{T}{4} = (x_{\text{max}}/v_0) \int_0^{x_{\text{max}}/x_{\text{max}}} dy/\sqrt{1-y}$. Une primitive de $1/\sqrt{1-y}$ est $-2\sqrt{1-y}$, on en déduit :

$$T = \frac{4x_{\text{max}}}{v_0} \left[-2\sqrt{1-y} \right]_{y=0}^1 = \frac{8x_{\text{max}}}{v_0} = \frac{4mv_0}{F_0}.$$

On constate qu'elle dépend de l'énergie du mouvement par l'intermédiaire de v_0 : les oscillations ne sont pas harmoniques.

— = FIN = —